Temat: Zastosowanie funkcji kwadratowych do rozwiązywania zadań.

Czasami rozważając jakiś problem, możemy opisać zależność między badanymi wielkościami za pomocą funkcji kwadratowej. Korzystając z własności tej funkcji, możemy wówczas odpowiedzieć na pytania dotyczące tych wielkości.

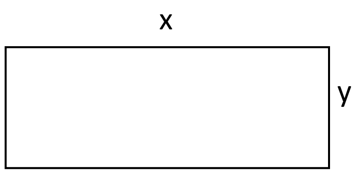
Trzy pierwsze przykłady to tak zwane zadana optymalizacyjne, szukamy wartości największy i najmniejszych pewnych funkcji, będziemy tu wykorzystywać fakt, że nasze funkcje będą funkcjami kwadratowymi, czyli parabolami i wykorzystamy fakt, że parabola przyjmuje wartość największą lub najmniejszą (zależy to od a) w wierzchołku.

Przykład 1

Mamy 28 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego pole powierzchni było największe.

Rozwiązanie:

Oznaczmy boki prostokąta literami x, y.



- Piszemy wzór funkcji, która ma być największa, w naszym przypadku tą funkcją jest pole prostokąta.

Pole ma być największe, a pole to: $P=x\cdot y$

- Funkcja, którą badamy jest uzależniona od dwóch niewiadomy z treści zadania wynika związek między tymi niewiadomymi dzięki, któremu uzależnimy naszą funkcję od jednej zmiennej.

Podano nam, że obwód {obwód figury, to suma wszystkich jej boków} jest równy 28 m, zatem $2x+2y=28$, stąd wyznaczymy y.

$2x+2y=28 \quad |:2$

$x+y=14$

$y=14-x$

Teraz możemy zapisać już pole prostokąta jako funkcję jednej zmiennej x, więc

$P= x\cdot y$

$P(x)=x(14-x)= 14x-x^2= -x^2+14x$, dziedziną tej funkcji jest przedział $(0,14)$, gdyż wtedy boki są liczbami dodatnimi.

Zauważmy, że pole jest funkcją kwadratową, więc wykres jest parabolą ramionami skierowaną w dół (bo a= -1<0), więc największą wartość przyjmuje w wierzchołku, zatem

x=$-\frac{b}{2a}=-\frac{14}{2\cdot(-1)}=7$ jeden bok ma długość 7m, drugi obliczymy ze wzoru y=14-7=7.

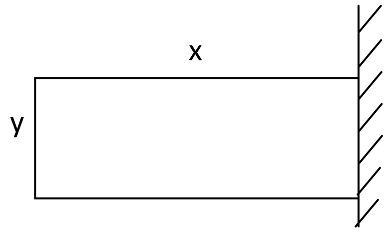
Zatem ogródek powinien być kwadratem o boku 7m, wtedy jego powierzchnia będzie największa.

Przykład 2

Mamy 28 m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek, przylegający jednym z boków do ściany domu. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego pole powierzchni było największe.

Rozwiązanie:

Oznaczmy boki prostokąta literami x, y.



- Piszemy wzór funkcji, która ma być największa, w naszym przypadku tą funkcją jest pole prostokąta.

Pole ma być największe, a pole to: P=x·y

- Funkcja, którą badamy jest uzależniona od dwóch niewiadomy z treści zadania wynika związek między tymi niewiadomymi dzięki, któremu uzależnimy naszą funkcję od jednej zmiennej.

Podano nam, że obwód {obwód figury, to suma wszystkich jej boków} jest równy 28 m, zatem 2x+y=28, stąd wyznaczymy y.

2x+y=28

y=28-2x

Teraz możemy zapisać już pole prostokąta jako funkcję jednej zmiennej x, więc

P= x·y

P(x)=x(28-2x)= 28x-2x^2= -2x^2+28x, dziedziną tej funkcji jest przedział (0,14), gdyż wtedy boki są liczbami dodatnimi.

Zauważmy, że pole jest funkcją kwadratową, więc wykres jest parabolą ramionami skierowaną w dół (bo a= -2<0), więc największą wartość przyjmuje w wierzchołku, zatem x=$-\frac{b}{2a}=-\frac{28}{2\cdot(-2)}=7$ jeden bok ma długość 7m, drugi obliczymy ze wzoru

y=28-2x, więc y=28-14=14.

Zatem ogródek powinien być prostokątem o wymiarach 7m x 14m, wtedy jego powierzchnia będzie największa.

Przykład 3

Centrala ogrodnicza skupuje dziennie 3t truskawek, płacąc producentom 3zł za kilogram i sprzedaje je po 3,5zł za kilogram. Kierownik centrali oszacował, że każda obniżka ceny 1kg sprzedawanych truskawek o 10 gr zwiększa ilość sprzedanych truskawek o 100kg dziennie. Jaka powinien ustalić cenę sprzedaży 1kg truskawek, aby zysk centrali był największy?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x ilość obniżek o 10gr

(3,5-0,1x) – cena po x obniżkach o 10gr

(3000+100x) ilość sprzedawanych truskawek po obniżce x razy o 10gr.

(3,5-0,1x)(3000+100x) – wartość ze sprzedaży truskawek po nowej cenie

3·(3000+100x) – koszty zakupu truskawek

Napiszmy funkcję określającą zysk (różnica między wartością uzyskaną ze sprzedaży a kosztami poniesionymi na ich zakup):

z(x)=(3,5-0,1x)(3000+100x)- 3·(3000+100x)

z(x)=10500+350x-300-10x^2 – 9000 - 300x

z(x)=-10x^2+50x+1200

Zatem zauważamy, że jest to parabola ramionami skierowana w dół zatem funkcja osiągnie wartość największą w wierzchołku

x= - b/2a=-50/(-20)=2,5

Zatem cena truskawek powinna wynosić:

3,5-0,1·2,5=3,25

Odp. Cena powinna wynosić 3,25 zł, aby zysk centrali był największy.

Przykład 4

Prostokątny trawnik ma powierzchnię $252m^2$. Oblicz wymiary tego trawnika jeśli różnią się one o 9m.

Rozwiązanie:

Skoro wymiary różnią się o 9, to jeden bok możemy oznaczyć x, a drugi x-9, wtedy możemy ułożyć równanie, gdyż znamy pole a pole to iloczyn długości boków:

$P=a \cdot b$

$x(x-9)=252$

$x^2 - 9x - 252=0$

teraz wystarczy już tylko rozwiązać równanie kwadratowe.

Obliczmy deltę i pierwiastki równania:

$\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4\cdot 1\cdot(-252)=81+1008=1089$

$\sqrt{\Delta}=33$

$x_1=\frac{9+33}{2}=21$, $x_2=\frac{9-33}{2}=-12<0$ sprzeczne, bok nie może być liczbą ujemną.

Odp: Zatem jeden bok ma 21m, a drugi jest o 9 mniejszy, więc ma 12m.

Teraz podam dwa zadania z wskazówką do rozwiązania proszę dokończyć te zadania.

Przykład 5

Kwiat lotosu wyrósł nad powierzchnię wody na 4 stopy. Pod naporem wiatru zanurzył się w wodzie w odległości 16 stóp od miejsca, w którym był wcześniej widoczny nad wodą. Jaka była głębokość wody?

Wskazówka

Jeżeli x - głębokość wody, to x+4 wysokość kwiatka i po jego pochyleniu można wyobrazić sobie pewien trójkąt prostokątny. Zatem z tw. Pitagorasa: zatem dalej rozwiązujemy wykorzystując twierdzenie Pitagorasa…………………..

Przykład 6

Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 371. Jakie to liczby?

Wskazówka: kolejne liczby nieparzyste to np. 2n+1, 2n+3, 2n+5, więc

$(2n+1)^2+(2n+3)^2+(2n+5)^2=371$ i teraz rozwiązujemy równanie kwadratowe………

Proponuję skorzystać także z rozwiązanych zadań ze stron:

http://matematyka.pisz.pl/strona/1459.html

http://matematyka.pisz.pl/strona/1685.html

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zad. 1 Plac zabaw ma kształt prostokąta 12m x 18m. Szerokość placu zwiększono o x m, a długość o 2x m. Wyznacz x, jeśli powierzchnia placu wzrosła o 144m2.

Zad. 2 Na ogrodzenie działki mamy do dyspozycji 300m siatki ogrodzeniowej, jakie wymiary powinna mieć ta działka abyśmy mogli ogrodzić działkę o jak największym polu?

Zad. 3 Właściciel kina stwierdził, że przy cenie biletu 10zł, na seans przychodzi średnio 100 osób, a podniesienie ceny biletu o każdą złotówkę powoduje, że liczba widzów zmniejsza się o 5. Jaką cenę biletu należy ustalić, aby dochód kina był największy?