

## Temat: Rozkład wielomianu na czynniki.

Rozkład wielomianu na czynniki polega na przedstawieniu go w postaci iloczynowej.

**Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki liniowe lub kwadratowe nierozkładalne.**

Wielomian drugiego stopnia (funkcję kwadratową) rozkładamy na czynniki liniowe wykorzystując postać iloczynową funkcji kwadratowej.

**Przykład** {rozkład wielomianu drugiego stopnia}

Rozłóż na czynniki nierozkładalne:

a)  $W(x)=4x^2 - 13x + 3 = 0$

Rozwiązanie:

$$W(x)=4x^2 - 13x + 3 = 0$$

wypisujemy współczynniki:  $a=4, b=-13, c=3$

obliczamy  $\Delta$  ze wzoru  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121 \text{ zatem już wiemy, że równanie ma dwa rozwiązania.}$$

Teraz obliczymy  $\sqrt{\Delta}$ , więc  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

Teraz obliczamy  $x_1$  i  $x_2$  z podanych wzorów:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + 11}{2 \cdot 4} = \frac{13 + 11}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - 11}{2 \cdot 4} = \frac{13 - 11}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Teraz korzystamy z postaci iloczynowej  $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$W(x)=4(x - 3)\left(x - \frac{1}{4}\right) \text{ - najprostszy rozkład na czynniki.}$$

b)  $W(x)=x^2+2x+1$

wypisujemy współczynniki:  $a=1, b=2, c=1$

obliczamy  $\Delta$  ze wzoru  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \text{ zatem już wiemy, że równanie ma jedno rozwiązanie.}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1.$$

$$W(x)=(x+1)(x+1) \text{ - najprostszy rozkład na czynniki.}$$

c)  $W(x) = 5x^2 - 6x + 6$

wypisujemy współczynniki:

$a=5, b=-6, c=6$

obliczamy  $\Delta$  ze wzoru  $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 36 - 120 = -84$  zatem już wiemy, że równanie nie ma rozwiązania, bo

$\Delta$  jest ujemna, więc wielomianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

**Wniosek: Funkcję kwadratową można rozłożyć na czynniki liniowe, gdy  $\Delta \geq 0$ .**

Stosujemy kilka metod rozkładu wielomianu na czynniki:

➤ wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

np.

a)  $W(x) = x^4 - x^3 = x^3(x-1)$  – to jest najprostszy rozkład na czynniki  
czynniki  $x^3$  można oczywiście zapisać jako czynniki liniowe  $x \cdot x \cdot x$ .

b)  $W(x) = 2x^4 - 4x^2 + 6x = 2x(x^2 - 2x + 3)$

sprawdzamy, czy czynnik  $x^2 - 2x + 3$  można rozłożyć na czynniki liniowe

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$

zatem nie można tego czynnika rozłożyć na czynniki liniowe.

Zatem najprostszy rozkład wielomianu to:

$W(x) = 2x(x^2 - 2x + 3)$

c)  $W(x) = -2x^4 - 4x^2 + 6x = 2x(-x^2 - 2x + 3)$

sprawdzamy, czy czynnik  $-x^2 - 2x + 3$  można rozłożyć na czynniki liniowe

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 4}{2 \cdot (-1)} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 4}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 - 4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

zatem można ten czynnik rozłożyć na czynniki liniowe.

$W(x) = 2x(-x^2 - 2x + 3) = 2x(-1)(x+3)(x-1) = -2x(x+3)(x-1)$

Zatem najprostszym rozkładem tego wielomianu jest:

$W(x) = -2x(x+3)(x-1)$ .

➤ grupowanie wyrazów

np.  $W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

$W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x^2-4) = (x-2)(x-2)(x+2)$

Grupujemy po dwa wyrazy z dwóch pierwszych składników wyłączamy wspólny czynnik przed nawias. Następnie z pozostałych składników również wyłączamy czynnik przed nawias tak, aby w nawiasach było to samo wyrażenie. Następnie ten wspólny nawias wyłączmy przed nawis. teraz mamy już rozkład na czynniki. Teraz sprawdzamy czy są to czynniki liniowe jeśli tak to koniec, jeśli nie to sprawdzamy czy można te czynniki rozłożyć na niższego stopnia.

ogólnie:

$ac + ad + bc + bd = a(c+d) + b(c+d) = (a+b)(c+d)$

➤ stosowanie wzorów skróconego mnożenia

Ta metoda polega na zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia:

np.

$$\text{a) } x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

{czynnik  $x^2 + 1$  jest nierozkładalny, więc jest to najprostszy rozkład na czynniki.}

$$\text{b) } x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

{czynnik  $x^2 + 3x + 9$  jest nierozkładalny (bo delta jest ujemna), więc jest to najprostszy rozkład na czynniki.}

**Proponuję skorzystać z omówionych przykładów ze strony:**

<http://www.e-zadania.pl/liceum/wielomiany/rozklad-wielomianu-na-czynniki/>

**Zadania do samodzielnego rozwiązania:**

Rozłóż wielomian na czynniki:

- a)  $W(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
- b)  $W(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$
- c)  $W(x) = x^3 - 9x^2$
- d)  $W(x) = x^2 - 9x + 20$