

Temat: Równania wielomianowe.

Równania wielomianowe drugiego stopnia (równania kwadratowe) rozwiązywaliśmy w dziale funkcja kwadratowa. Dzisiaj zajmiemy się rozwiązywaniem równań wyższego stopnia. Opiszę kilka podstawowych metod rozwiązywania równań wielomianowych.

Rozwiązywanie równania wielomianowego polega na znalezieniu wszystkich $x \in \mathbb{R}$, dla których wielomian jest równy zero

Równania te można rozwiązać metodą:

a) wyłączenia czynnika przed nawias

np. Rozwiąż równanie:

$$1) x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

wyłączamy czynnik x przed nawias:

$x(x^2 - 5x + 6) = 0$ zatem wykorzystujemy fakt, że iloczyn jest równy zero, gdy chociaż jeden z czynników jest zerem, więc:

$$x=0 \text{ lub } x^2 - 5x + 6=0$$

jedno rozwiązanie już mamy tzn. $x=0$

i dalej rozwiązujemy równanie kwadratowe $x^2 - 5x + 6=0$, czyli:

wypisujemy współczynniki:

$$a=1, b=-5, c=6$$

obliczamy Δ ze wzoru $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$ zatem już wiemy, że równanie ma dwa rozwiązania.

Teraz obliczymy $\sqrt{\Delta}$, więc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Teraz obliczamy x_1 i x_2 z podanych wzorów:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Odp: Rozwiązaniami równania są liczby $x=0$, $x=3$, $x=2$.

2) Rozwiąż równanie: $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

Wyciągamy x przed nawias

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

Zauważmy, że wyrażenie $x^2 - 6x + 9$ można zapisać korzystając ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, czyli:

$$x(x - 3)^2 = 0$$

Teraz przyrównujemy:

$$x = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

Rozwiązaniem równania są liczby 0 i 3.

b) metoda grupowania:

1) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$

$$x^2(x-2) - 4(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2-4) = 0$$

$$x-2=0 \text{ lub } x^2-4=0$$

$$x=2 \text{ lub } x^2=4$$

$$x=2 \text{ lub } x=2 \text{ lub } x=-2.$$

Odp: Rozwiązaniem równania, to $x=2$ lub $x=-2$.

2) $W(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$W(x) = x^2(x+2) - 1(x+2)$$

$$W(x) = (x^2-1)(x+2)$$

$$W(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Otrzymany iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy gdy jeden z czynników jest równy 0. Stąd otrzymujemy rozwiązanie równania wielomianowego: $W(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ lub $x=-1$ lub $x=-2$

Pokażmy jeszcze kilka przykładów:

$$\begin{aligned} 3) \quad & x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \\ & x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \\ & (x+1)(x^2-4) = 0 \\ & (x+1)(x-2)(x+2) = 0 \\ & x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \\ & x^2(x-3) + (x-3) = 0 \\ & (x-3)(x^2+1) = 0 \\ & x_1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0 \\ & x^2(x+2) - 3(x+2) = 0 \\ & (x+2)(x^2-3) = 0 \\ & (x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0 \\ & x_1 = -2, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

c) z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

$$x^3 + 8 = 0$$

$$(x+2)(x^2-2x+4) = 0$$

$$x+2=0 \quad \text{lub} \quad x^2-2x+4=0, \text{ stąd } \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$$

$$x = -2$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba -2.

Proponuję skorzystać z omówionych przykładów ze strony:

<http://www.e-zadania.pl/liceum/wielomiany/rownania-wielomianowe/>

<http://www.math.edu.pl/rownania-wielomianowe>

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Rozwiąż równania:

a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

b) $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$

c) $x^3 - 9x^2 = 0$

d) $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$