Temat: Wykres wielomianu. Nierówności wielomianowe.

Potrafimy już rysować wykresy wielomianów stopnia pierwszego (wykres funkcji liniowej, to prosta), i drugiego stopnia (wykres funkcji kwadratowej, to parabola). Teraz będziemy szkicować wykresy wielomianów wyższych stopni. Kiedy chcieliśmy narysować wykres funkcji kwadratowej szukaliśmy jej miejsc zerowych, wyznaczaliśmy współrzędne wierzchołka i rysowaliśmy wykres. Dzięki tym własnościom mogliśmy dokładnie sporządzić wykres funkcji kwadratowej, czyli wielomianu drugiego stopnia. Podobnie będziemy postępować w przypadku wielomianów wyższego stopnia. Jednak dokładne narysowanie wykresu dowolnego wielomianu bez wykorzystania komputera (lub pochodnych funkcji – o których w szkole średniej nie będziemy mówili) jest często niemożliwe. Zajmiemy się zatem szkicowaniem przybliżonego kształtu wykresu, wcześniej wyznaczając pierwiastki wielomianu, czyli jego miejsca zerowe.

Na podstawie szkicu wykresu będziemy odczytywali rozwiązania nierówności wielomianowych.

Uwaga 1 Liczbę a nazywamy pierwiastkiem k –krotnym, gdzie k=1,2,3,…… wielomianu W, jeżeli w rozkładzie na czynniki wielomianu W występuje czynnik $(x-a)^k$ i nie występuje czynnik $(x-a)^{k+1}$.

Np. $W(x)=x^3(x-2)(x+3)^4(x-6)^5$

Pierwiastki tego wielomianu, to: 0, 2, -3, 6, przy czym

0 jest pierwiastkiem trzykrotnym (bo x^3)

2 jest pierwiastkiem jednokrotnym (bo $(x-2)^1$)

-3 jest pierwiastkiem czterokrotnym (bo $(x+3)^4$)

6 jest pierwiastkiem pięciokrotnym (bo $(x-6)^5$).

Uwaga 2

Wielomian zmienia znak w pierwiastkach nieparzystej krotności, natomiast w pierwiastkach parzystej krotności nie zmienia znaku. Znak wielomianu w przedziale (a,∞), gdzie a jest największym pierwiastkiem jest taki sam jak znak współczynnika przy najwyższej potędze występującej w danym wielomianie.

Przykład 1

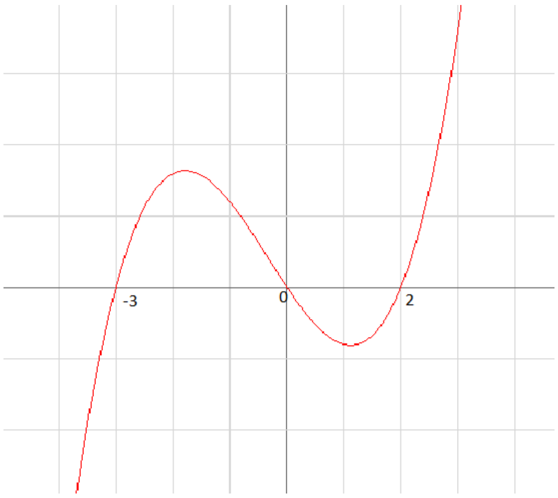
Narysuj wykres wielomianu W(x)=x(x-2)(x+3). Podaj rozwiązanie nierówności w(x)<0 oraz w(x)>0

Rozwiązanie:

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji:

x(x-2)(x+3)=0 stąd x=0 lub, x-2=0 lub x+3=0, zatem x=0 lub, x=2 lub x= - 3.

Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, więc wielomian w przedziale (2,∞) przyjmuje wartości dodatnie. Szkicujemy wykres rozpoczynając z prawej strony nad osią OX. Wszystkie pierwiastki są jednokrotne, więc w każdym z nich wielomian zmienia znak.



Mamy już narysowany wykres teraz odczytamy rozwiązanie nierówności:

Zauważmy, że nasz wielomian przyjmuje wartości ujemne w przedziale (-∞,-3) oraz w przedziale (0,2), zatem

W(x)<0 dla x $\in (-\infty,-3) \cup (0,2)$.

Natomiast wartości dodatnie przyjmuje dla argumentów należących do przedziału (-3,0) oraz (2,∞), zatem

W(x)>0 dla x $\in (-3,0) \cup (2,\infty)$.

Przykład 2

Narysuj wykres wielomianu W(x)= $-x^3$ +4x. Podaj rozwiązanie nierówności w(x)<0.

Rozwiązanie:

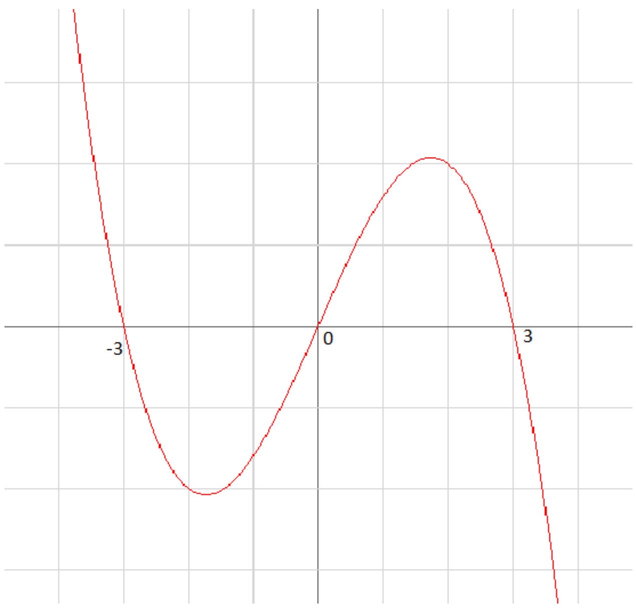
Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji:

$-x^3+9x=0$ { rozłożymy wielomian na czynniki, wyłączymy x przed nawias}

$-x(x^2-9)=0$

stąd x=0 lub $x^2-9=0$, więc pierwiastki wielomianu, to x=0, x=3 i x=-3.

Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc wielomian w przedziale (3,∞) przyjmuje wartości ujemne. Szkicujemy wykres rozpoczynając z prawej strony pod osią OX. Wszystkie pierwiastki są jednokrotne, więc w każdym z nich wielomian zmienia znak.



Narysowaliśmy już wykres teraz proszą nas o rozwiązanie nierówności w(x)<0, zauważmy, że nasz wielomian przyjmuje wartości ujemne w przedziale (-3,0) oraz w przedziale (3,∞), zatem:

W(x)<0 dla x $\in (-3,0) \cup (3,\infty)$.

Przykład 3

Narysuj wykres wielomianu $W(x)=x^3(x+3)^4$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji:

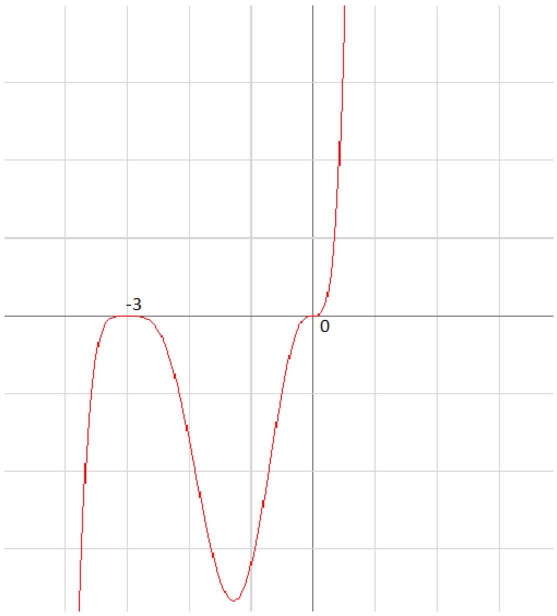
$x^3(x+3)^4=0$

Pierwiastki tego wielomianu, to: 0, -3.

Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, więc wielomian w przedziale $(0,\infty)$ przyjmuje wartości dodatnie. Szkicujemy wykres rozpoczynając z prawej strony nad osią OX.

0 jest pierwiastkiem trzy krotnym (bo x^3) wielomian zmienia znak w tym miejscu zerowym.

-3 jest pierwiastkiem czterokrotnym (bo $(x+3)^4$) wielomian nie zmienia znaku w tym miejscu zerowym.



Przykład 4

Rozwiązanie:

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji:

$-x^3 +2x^2 + 2x-4 =0$ { rozłożymy wielomian na czynniki, metodą grupowania}

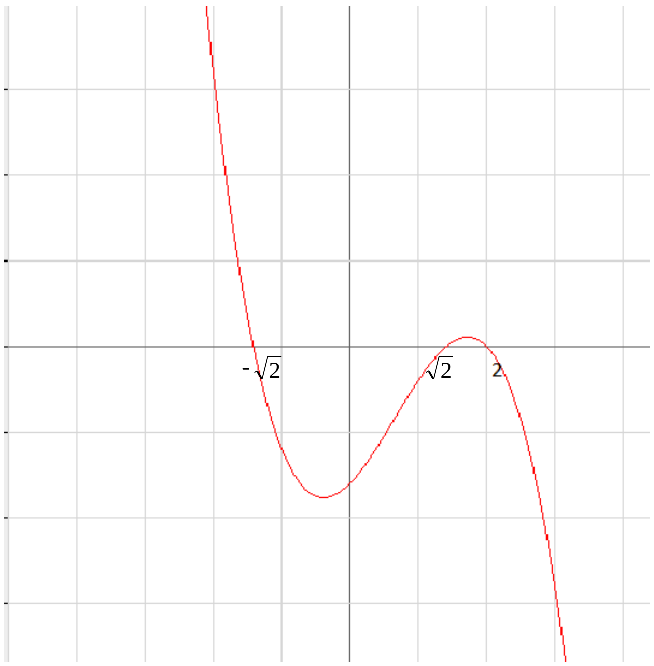
$-x^2(x-2)+2(x-2)=0$

$(x-2)(-x^2+2)=0$

$x=2$ lub $x=\sqrt{2}$ lub $x=-\sqrt{2}$

Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc wielomian w przedziale $(2,\infty)$ przyjmuje wartości ujemne. Szkicujemy wykres rozpoczynając z prawej strony pod osią OX. Wszystkie pierwiastki są jednokrotne, więc w każdym z nich wielomian zmienia znak.

Szkicujemy wykres:



Zadania do samodzielnego rozwiązania:

zad.1 Narysuj wykres wielomianu $W(x)= x^3 +3x^2 - 2x -6$ oraz podaj rozwiązanie nierówności $w(x)>0$.

zad. 2 Narysuj wykres wielomianu $w(x)=x^2(x-4)$ oraz podaj rozwiązanie nierówności $w(x)<0$.