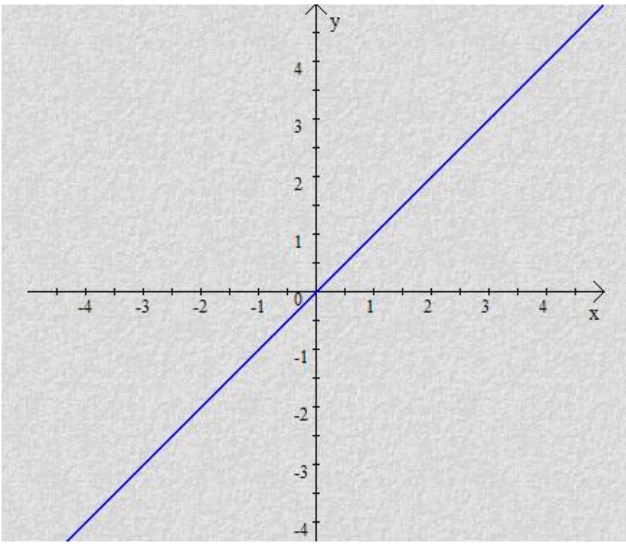
Temat: Monotoniczność funkcji.

Mówimy, że funkcja $f: X \to R$ jest **rosnąca,** gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, *to* $f(x_1) < f(x_2)$.

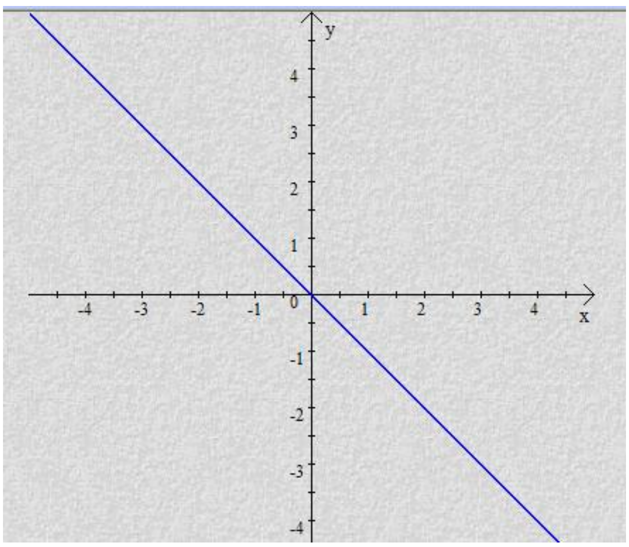
Np.



Wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji rosną.

Mówimy, że funkcja $f: X \to R$ jest **malejąca,** gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, *to* $f(x_1) > f(x_2)$.

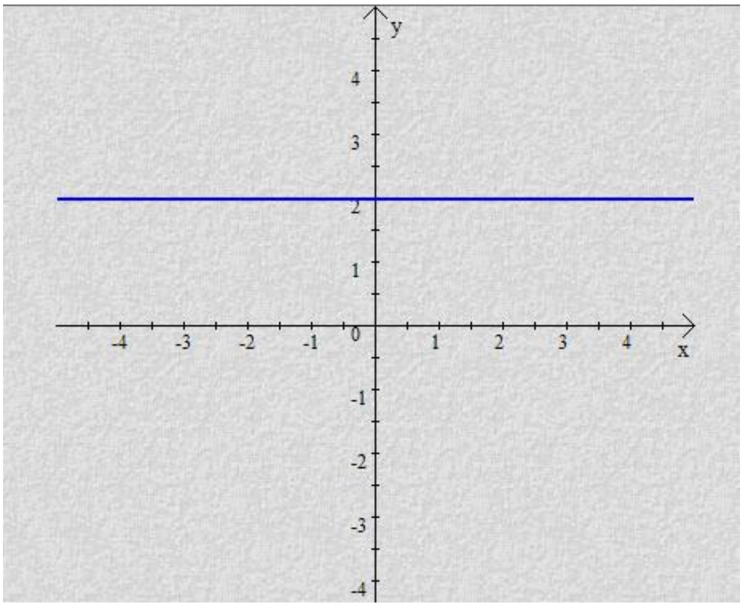
Np.



Wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji maleją.

Mówimy, że funkcja $f : X \to R$ jest **stała,** gdy dla dowolnego argumentu $x \in X$ przyjmuje tę samą wartość c: tzn. f(x)=c (czyli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek: jeśli $f(x_1) - f(x_2) = 0$) .

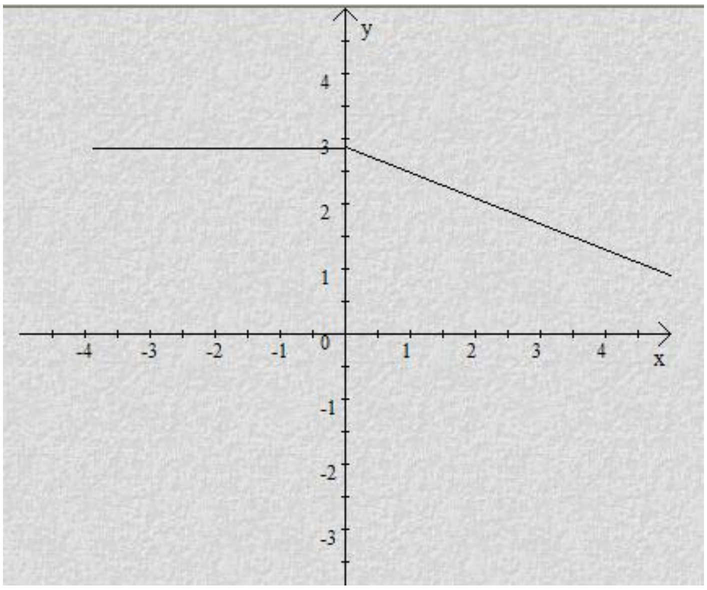
Np.



Dla dowolnych argumentów wartość funkcji jest stała (wynosi 2)

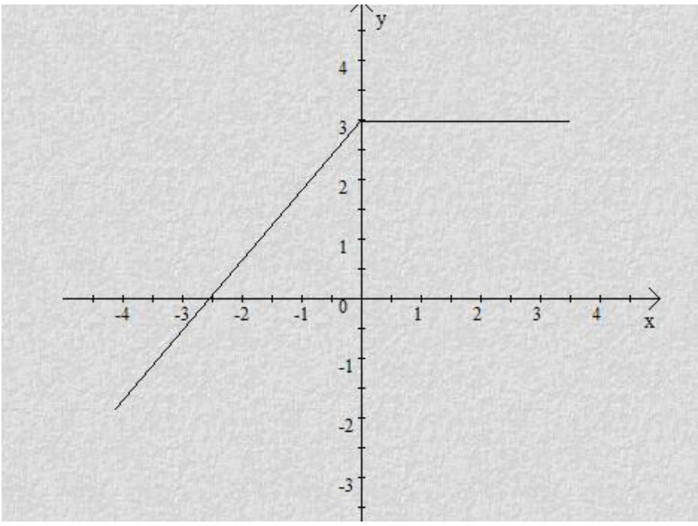
Mówimy, że funkcja $f : X \to R$ jest **nierosnąca,** gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, *to* $f(x_1) \geq f(x_2)$. (nierosnąca tzn. malejąca lub stała)

Np.



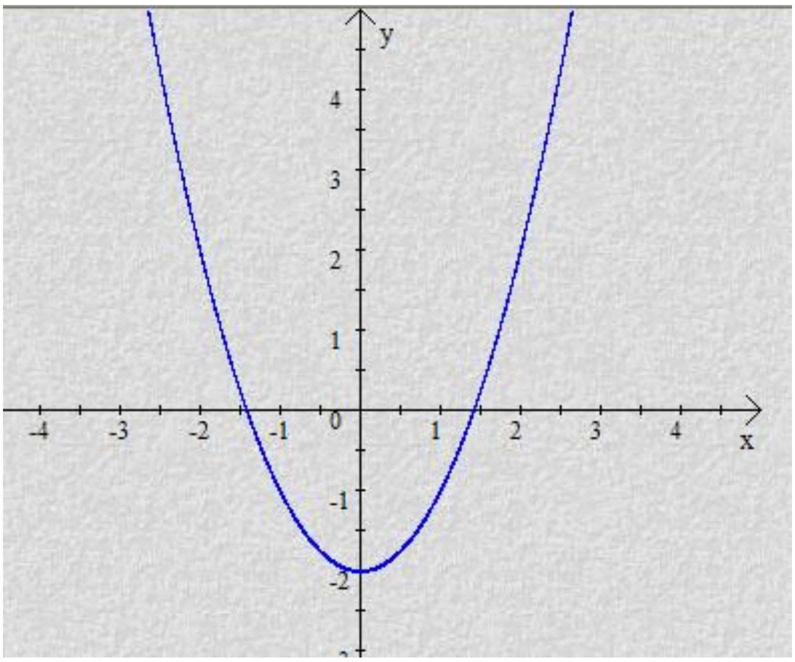
Mówimy, że funkcja $f : X \to R$ jest **niemalejąca,** gdy dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, *to* $f(x_1) \leq f(x_2)$. (niemalejąca tzn. rosnąca lub stała)

Np.



Występują również funkcje, które nie są monotoniczne w całej dziedzinie, natomiast są monotoniczne w przedziałach.

Przykład



Funkcja przedstawiona na rysunku nie jest monotoniczna. Można jednak rozpatrywać jej monotoniczność w przedziałach.

W przedziale $(-\infty, 0)$ maleje, natomiast w przedziale $(0, \infty)$ jest rosnąca.

Przykład

Narysuj wykres funkcji y=2x+1 i określ jej monotoniczność.

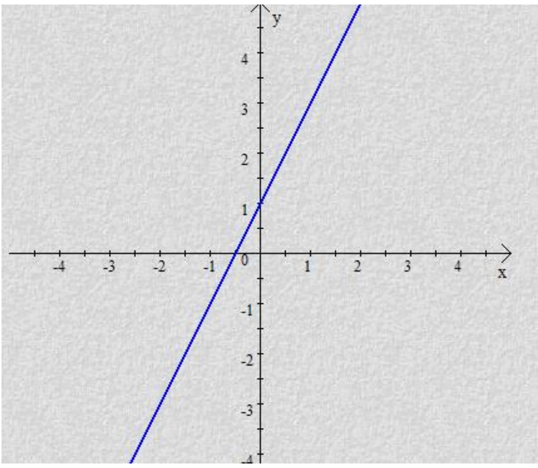
Rysujemy tabelkę i obliczamy wartości dla kilku wybranych argumentów nie podano dziedziny, więc D = R, (zatem punkty można łączyć)

x	0	1	2	3	4
y=2x+1	1	3	5	7	9

Skąd dla x=0 y=1, bo y=2x+1, czyli y=2·0+1=1

Podobnie dla x=1, y= y=2·1+1=3

Rysujemy wykres:



Przykład

Zbadaj z definicji monotoniczność funkcji f(x) = 3x+2.

Zauważmy, że dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Weźmy dowolne x_1, x_2 należące do dziedziny takie, że $x_1 < x_2$.

Badamy znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 + 2 - (3x_2 + 2) = 3(x_1 - x_2)$$

Zauważmy, że z założenia $x_1 < x_2$, *to* $x_1 - x_2 < 0$, więc $3(x_1 - x_2) < 0$, zatem

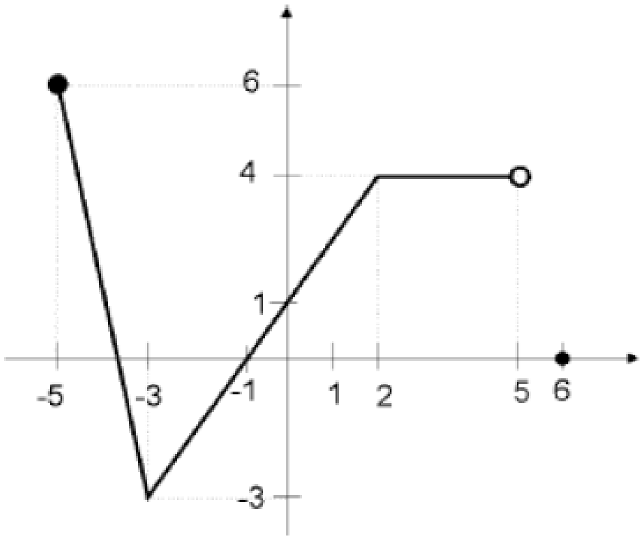
$f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 + 2 - (3x_2 + 2) = 3(x_1 - x_2) < 0$, a z tego wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$ czyli funkcja jest rosnąca.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zad. 1 Narysuj wykres funkcji $y=3x$ i określ jej monotoniczność.

Zad. 2 Narysuj wykres funkcji $y= - 3x$ i określ jej monotoniczność.

Zad. 3 Na podstwie wykresu odczytaj przedziały monotoniczności funkcji:



Zad. 4 Co można powiedzieć o monotoniczności poniższej funkcji?