Temat: Układy równań liniowych.

Układy równań liniowych można rozwiązywać kilkoma metodami.

Na dzisiejszej lekcji omówimy dwie metody: podstawiania i przeciwnych współczynników.

Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Z jednego równania wyliczamy zmienną x lub y i podstawiamy ją do drugiego równania. Za pomocą drugiego równania obliczamy drugą zmienną. Mamy w ten sposób drugą zmienną w sposób jawny, za jej pomocą wyliczamy pierwszą zmienną.

Przykład:

a) Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} -3x+2y=4 \\ x+3y=6 \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy:

x = 6 - 3y

Wstawiamy do pierwszego:

-3(6 - 3y) + 2y = 4

-18 + 9y + 2y = 4

11y = 22

y = 2

Wstawiamy y = 2 do x = 6 - 3y

Otrzymujemy:

x = 6 - 3*2 = 0

Rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases} y=2 \\ x=0 \end{cases}$$

Odp: Układ oznaczony. Rozwiązaniem jest para liczb x=0, y=2

b) Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x-y=2 \\ -x+4y=-1 \end{cases}$$

Z jednego równania wyznaczamy niewiadomą x lub y:

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ -x+4y=-1 \end{cases}$$

Tak wyznaczoną niewiadomą wstawiamy do drugiego w układzie równania:

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ -x+4(2x-2)=-1 \end{cases}$$

W ten sposób doprowadziliśmy drugie równanie do równania z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ -x+8x-8=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ 7x-8=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ 7x=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Wyliczyliśmy jedną niewiadomą, którą teraz wstawiamy do drugiego równani:

$$\begin{cases} y = 2*1 - 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

I mamy rozwiązanie naszego równania:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

W celu sprawdzenia, czy dana para liczb (x, y) jest rozwiązaniem układu równań, należy je wstawić do obu równań i zobaczyć, czy występują równości.

Metoda przeciwnych współczynników

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwoma niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników.

W metodzie przeciwnych współczynników budujemy dwa równoważne układy równań takie, że w jednym są przeciwne współczynniki przy niewiadomej x, a wdrugim przy niewiadomej y.

W każdym z układów, dodając stronami równania eliminujemy jedną zmienną. Otrzymujemyw ten sposób dwa równania, każde z jedną niewiadomą, zamiast dwóch układów równań.

Po rozwiązaniu każdego z tych równań otrzymujemy rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & |\cdot 3 \\ x + 5y = 7 & |\cdot (-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y = 24 \\ -6x - 30y = -42 \end{cases}$$

Dodajemy strony lewą i prawą obu równań

6x + 9y+(-6x) -30y = 24 -42
-21y = - 18 | /(-21)
y = $\frac{18}{21}$, zatem y= $\frac{6}{7}$
Teraz obliczymy niewiadomą x:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & |\cdot 5 \\ x + 5y = 7 & |\cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 15y = 40 \\ -3x - 15y = -21 \end{cases}$$

Dodajemy strony lewą i prawą obu równań
10x +15y -3x -15y = 40 -21
7x = 19
x = $\frac{19}{7}$, zatem x = $2\frac{5}{7}$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb: x = $2\frac{5}{7}$, y= $\frac{6}{7}$.

W praktyce często rozwiązujmy układy równań liniowych łącząc te metody, tzn.:

Przykład:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 3y = 6 \; /*2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + 6y = 12 \end{cases}$$

dodajemy równania stronami i otrzymujemy:

2x - y -2x +6y = 3 + 12

5y = 15

y = 3

Wstawiamy tą wartość np. do pierwszego równania z podstawowego układu równań:

2x - y = 3

2x - 3 = 3

przenosimy -3 na drugą stronę równania:

2x = 3 + 3

2x = 6 /:2

x = 3

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb x=3, y=3.

Przykład:

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 7y = 11 \end{cases}:$$

Rozwiązanie:

Aby współczynniki przy zmiennej x były liczbami przeciwnymi pomnożymy stronami pierwsze równanie przez liczbę 3, a drugie równanie przez liczbę -2:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 12 \\ -6x - 14y = -22 \end{cases}$$

Teraz równania dodajemy stronami i otrzymujemy:

$$9y - 14y = 12 - 22 \quad \Leftrightarrow \quad -5y = -10 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2$$

Z pierwszego równania wyznaczamy x dla obliczonego y:

$$2x + 3 \cdot 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Odp. Rozwiązaniem danego układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Wyróżniamy układy równań:

- oznaczone

- nieoznaczone

- sprzeczne

Jeżeli układ równań liniowych nie ma żadnego rozwiązania, nazywa się sprzecznym.

Jeżeli układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie, nazywa się oznaczonym.

Jeżeli układ równań liniowych ma co najmniej dwa rozwiązania, nazywa się nieoznaczonym. Ale każdy nieoznaczony układ równań liniowych ma nieskończenie wiele rozwiązań (to znaczy, że niemożliwy jest przypadek, gdy mamy, na przykład, dokładnie dwa rozwiązania).

Przykład sprzecznego układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$$

Zauważmy, że gdybyśmy pierwsze równanie pomnożyli przez 2 i dodali stronami to otrzymalibyśmy 0 = 5.

Przykład oznaczonego układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb x=$\frac{5}{7}$, y=$\frac{3}{7}$

Przykład nieoznaczonego układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -2x - 6y = -4 \end{cases}$$

Zauważmy, że gdybyśmy pierwsze równanie pomnożyli przez 2 i dodali stronami to otrzymalibyśmy 0 = 0.

Na koniec jeszcze jeden przykład:

W danym układzie równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \\ 10x + 15y = 5 \end{cases}$$

pierwsze równanie pomnożymy przez liczbę 6, a drugie podzielimy przez 5.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} & /\cdot 6 \\ 10x + 15y = 5 & /\div 5 \end{cases}$$

W wyniku tego otrzymamy następujący układ:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$$

Teraz pomnożymy drugie równanie przez -1

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=1 \ /\cdot(-1) \end{cases}$$

i dodamy równania stronami.

$$+\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -2x-3y=-1 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad\qquad 0=0}$$

Układ nieoznaczony ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Proponuję skorzystać jeszcze z przykładów omówionych na stronie

http://www.e-zadania.pl/gimnazjum/uklady-rownan/metoda-podstawiania/

Zadania do samodzielnego rozwiązywania:

Rozwiąż układ równań i określ jego typ:

a)
$$\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x+6y=15 \\ -2x+2y=2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 3x+9y=3 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-y=1 \end{cases}$