

Temat: Funkcja liniowa i jej własności.

Dzisiejszy temat rozpoczyna jeden z ważniejszych działów omawianych w szkole średniej. Wiadomości omawiane w tym dziale będziemy wykorzystywać także w innych działach.

Definicja:

Funkcję postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in R$, a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Przypominam, że zapis $f(x) = ax + b$, to inaczej $y = ax + b$, bo $f(x) = y$

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Aby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć dwa punkty należące do jej wykresu i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta).

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Przykłady funkcji liniowych:

a) $y = 2x + 3$, to $a = 2$, $b = 3$ b) $y = -7x + 1$, to $a = -7$, $b = 1$,

c) $y = 3x$, to $a = 3$, $b = 0$

d) $y = 3$, to $a = 0$, $b = 3$

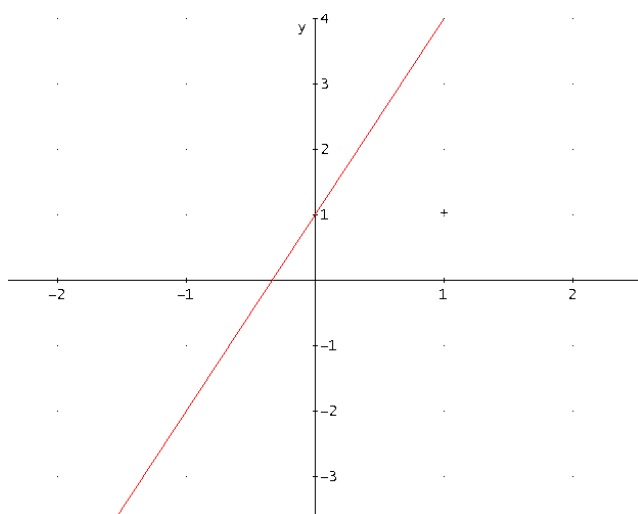
e) $y = 2 - x$, to $a = -1$, $b = 2$

Przykład

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 3x + 1$

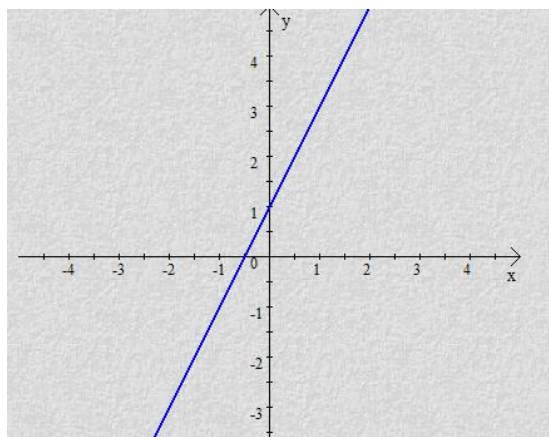
x	0	1
y=3x+1	1	4

Zatem znaleźliśmy dwa punkty $(0,1)$, $(1,4)$, które zaznaczymy w układzie współrzędnych i przez nie prowadzimy prostą. Otrzymana prosta jest wykresem funkcji $f(x) = 3x + 1$.

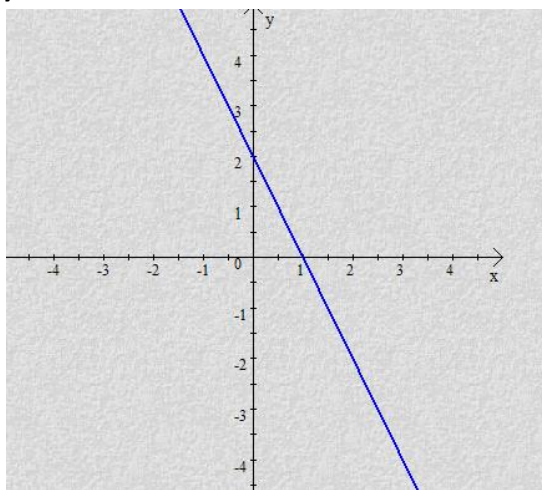


Narysujmy wykresy funkcji

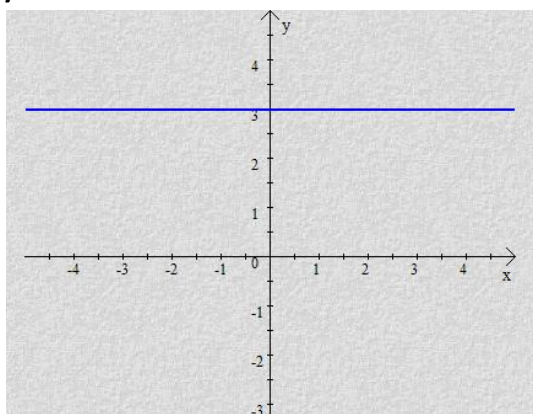
a) $y=2x+1$



b) $y = -2x + 2$



c) $y = 3$.



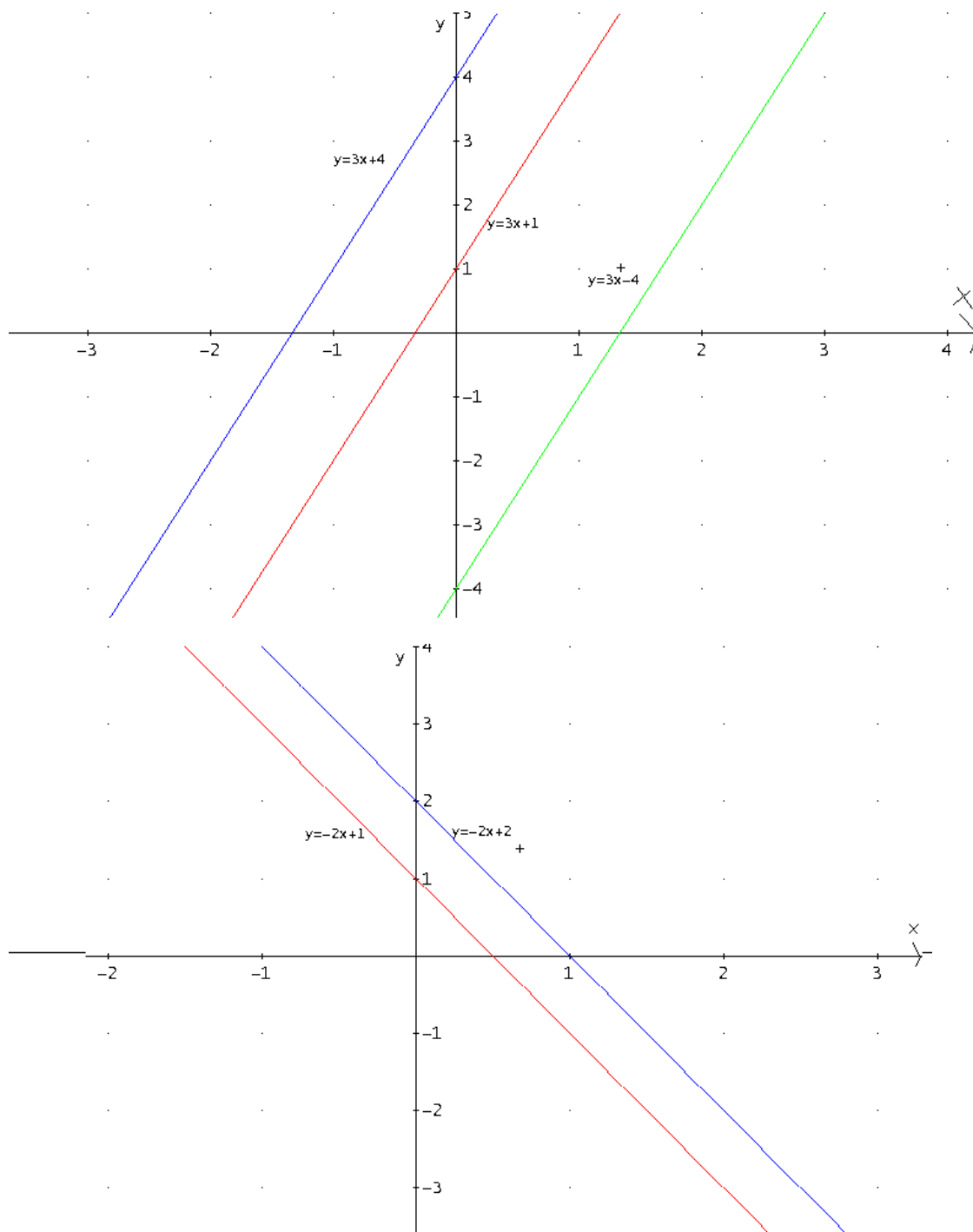
Twierdzenie:

Zauważmy, że:

- dla $a > 0$ funkcja jest rosnąca
- dla $a < 0$ funkcja jest malejąca
- dla $a = 0$ funkcja jest stała

Przykład

Narysuj wykresy funkcji $y=3x+1$, $y=3x+2$, $y=3x-4$, $y=-2x+1$, $y=-2x+2$



Zauważ, że współczynnik b wyznacza przecięcie wykresu z osią OY

Twierdzenie Prosta $y=ax+b$, przecina oś Y w punkcie $(0,b)$

Zauważ, że proste o tym samym współczynniku a są prostymi równoległymi

Twierdzenie

Proste $y=a_1x+b_1$ i $y=a_2x+b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

Warunek ten nazywamy **warunkiem równoległości prostych**.

Przykład

Wyznacz równanie prostej równoległej do $y=9x+5$ przechodzącej przez punkt $(0,7)$.

Rozwiązanie: Szukana funkcja określona jest wzorem $y=ax+b$.

Skoro ma być równoległa do prostej $y=9x+5$, to $a=9$, bo proste równoległe mają ten sam współczynnik kierunkowy a .

Wiemy, że przecina oś Y w punkcie $(0,7)$, to $b=7$.

Zatem wzór szukanej prostej to: $y=9x+7$.

Przykład

Wyznacz równanie prostej równoległej do $y=9x+5$ przechodzącej przez punkt $(-1,3)$.

Rozwiązanie: Szukana funkcja określona jest wzorem $y=ax+b$.

Skoro ma być równoległa do $y=9x+5$, to $a=9$, bo proste równoległe mają ten sam współczynnik kierunkowy a .

Zatem $y=9x+b$, musimy jeszcze wyznaczyć b .

W tym przypadku nie znamy punktu przecięcia z osią Y , więc współczynnik musimy obliczyć wykorzystując fakt, że jeśli punkt $(-1,3)$ leży na szukanej prostej, to jego współrzędne spełniają równanie tej prostej, więc pierwszą współrzędną podstawiamy za x a drugą za y do równania $y=9x+b$ i otrzymujemy $3=9 \cdot (-1)+b$, więc $b=3+9$, stąd $b=12$.

Zatem wzór szukanej prostej, to $y=9x+12$.

Przykład Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(0,1)$ i $(1,2)$.

Rozwiązanie: Szukana funkcja określona jest wzorem $y=ax+b$.

Wiemy, że przecina oś Y w punkcie $(0,1)$ zatem $b=1$, więc $y=ax+1$. Musimy jeszcze wyznaczyć a . Postępujemy podobnie jak w poprzednim przykładzie. Podstawiamy do wzoru $y=ax+1$ współrzędne punktu $(1,2)$ {za x podstawiamy 1, za y podstawiamy 2} i otrzymujemy:

$2=a \cdot 1+1$, zatem $a=2-1=1$.

Wzór szukanej funkcji to: $y=1x+1$, czyli $y=x+1$.

Przykład

Dla jakich wartości m funkcja $y=(m-1)x+2$ jest rosnąca?

Rozwiązanie: Funkcja jest rosnąca, gdy współczynnik kierunkowy a jest dodatni. W naszym przypadku $a = m-1$. Zatem $m - 1$ musi być dodatnie, czyli $m - 1 > 0$, czyli $m > 1$.

Odp: Funkcja $y=(m-1)x+2$ jest rosnąca dla $m \in (1, \infty)$.

Przykład

Wyznacz miejsce zerowe funkcji $y=x+2$.

Rozwiązanie:

Szukamy argumentu dla którego wartość funkcji wynosi 0.

Zatem za y podstawiamy 0 i otrzymujemy.

$$0=x+2$$

$$-x=2$$

$$x=-2$$

Odp. Miejsce zerowe jest równe -2.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zad. 1

Wyznacz miejsce zerowe funkcji $y=6x-9$.

Zad. 2

Dla jakich wartości m funkcja $y=(m-1)x+2$ jest malejąca?

Zad. 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt (0,5) i (3,1).

Zad. 4

Wyznacz równanie prostej równoległej do $y=3x+1$ przechodzącej przez punkt (1,-3).

Zad. 5 Narysuj wykresy funkcji:

a) $f(x)=x+4$

c) $y=2-x$

b) $f(x)=-4x+1$

d) $y=2$